

Vastaa viiteen kysymykseen.

1. Osoita, että AR(1)-prosessin $x_t - \theta x_{t-1} = e_t$, missä $e_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ ja $|\theta| < 1$, kovariansille pätee

$$\text{cov}(x_t, x_{t-k}) = \frac{\theta^k}{1 - \theta^2} \sigma^2 .$$

2. Osoita, että stationaarisen nollakeskiarvoisen prosessin x_t kovarianssi on positiivisemidefiniitti:

$$\sum_{k=1}^T \sum_{j=1}^T a_k a_j \gamma_x(k-j) = a^T \Gamma_X a \leq 0$$

kaikille $a = (a_1, \dots, a_T)^T \in \mathbb{R}^T$. Vihje: prosessin $y_t = \sum_{\tau=1}^T a_\tau x_{t+\tau}$ varianssi on ei-negatiivinen.

3. Johda stationariselle prosessille x_t ei-rekursiivinen r -askeleen ennustaja perustuen muuttujiin x_t, \dots, x_{t-p+1} .
4. Johda parametriestimaatit AR(p) prosessille käyttäen Yule-Walker ja LS menetelmiä. Muodosta ratkaisut ja vertaa toisiinsa (Vihje: tarkastele kovarianssiestimaatteja).
5. Osoita, että eteen ja taaksepäin suunnattujen lineaaristen ennustajien kertoimet ovat samoja. Kirjoita tähän perustuen yhtälöt forward-backward estimaatin määrittämiseksi prosessin x_t AR(p)-mallille. Vihje: Minimoitava sure on $\|r_t^f\|^2 + \|r_t^b\|^2$ (eteen- ja taaksepäin lasketut residuaalit); kirjoita yhtälöryhmä, jonka LS-ratkaisu minimoi tämän suureen siten, että parametreina ovat ennustuskertoimet.