

1. Olkoon  $F(x) = 2x - ax^2$ ,  $a > 0$ . Todenna, että  $F$ :n kiintopiste  $\bar{x} > 0$  on  $a$ :n käänteisluku. Etsi ao. lauseen avulla väli, jolla ko. kiintopisteit-eraatio suppenee. Etsi graafisen tarkastelun avulla laajempi suppenemisväli.

2. Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

arvoja on taulukoitu ohessa.

$x$	1.9	2.0	2.1	2.2
$f(x)$	0.4713	0.4773	0.4821	0.4861

Laske likiarvo  $f(1.96)$ :lle käyttäen ko. Newtonin interpolaatiopolynomia. Arvioi virhettä ao. virhekaavan avulla.

3. (a) Ratkaise pns-menetelmällä yhtälöryhmä  $Mx = [2, 3, 4, 5]^T$ , kun  $M$  on

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 11/4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & 9/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b)  $M$ :n singulaariarvot ovat 8.775, 7.483 ja 4.077 sekä neljäs singulaarivektori  $u_4$  on  $[3, -3, 1, 38]^T / \|u_4\|$ . Tutki, millä ehdolla yhtälöryhmällä  $Mx = y$  on (tarkka) ratkaisu. Mikä on tällöin yläraja lausekkeelle  $(\|\Delta x\|/\|x\|)(\|\Delta y\|/\|y\|)$ ? (Edellä  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ ).

4. Iteroi Newtonin menetelmällä yhtälöryhmän

$$\begin{cases} t^2 + s^2 - 4 = 0 \\ e^t - s = 0 \end{cases}$$

ratkaisua 2 kierrosta alkuarvoilla  $t_0 = 0.5$  ja  $s_0 = 1.7$ .

5. Osoita formaalisti, että Eulerin toisen kertaluvun menetelmän

$$\Phi = f + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f \right)$$

kertaluku on 2. Määrää ko. menetelmää käyttäen AAT:n

$$\begin{cases} y' &= -xy \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

liikiarvo pisteessä  $x = 0.3$ , kun  $h = 0.1$ .

## Numeeriset menetelmät

LT, 8.3.1996

1. Olkoon  $p(z) = 2z^2 - 12.02z + 18.06$ . Etsi korkeintaan 2-asteinen polynomi  $q(z)$  s.e. piste  $z = 3$  on polynomien  $(p + q)(z)$  kaksinkertainen juuri. Laske  $q$ :n kerroinvektorin  $\| \cdot \|_2$ .
2. Etsi väli  $I$ , jossa sopiva kiintopisteiteraatio varmasti suppenee kohti yhtälön  $\sin(x) = 0.9x$  ratkaisua  $\tilde{x} > 0$ . Iteroi 12 kierrosta ja arvioi virhettä  $|\tilde{x} - x_{12}|$ .
3. Olkoon  $p(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ . Etsi korkeintaan astetta 4 oleva polynomi  $q(x)$  s.e. virhe  $\|p - q\|_\infty = \max_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |p(x) - q(x)|$  minimoituu. (Voit käyttää desimaalilukuja). Mikä on  $\|p - q\|_\infty$  tällöin?
4. Ratkaise AAT

$$\begin{cases} y'(x) &= xy \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

3-kertaluvun Taylorin menetelmällä välillä  $[0, 0.5]$  askelpituudella  $h = 0.1$ .

5. Mikä on integraalin

$$\int_{-1}^1 (1 + x^4)(1 + \tan(x)) dx$$

liikiarvo sellaisella Newton-Cotesin (suljetulla) kaavalla, jonka tarkkuusaste  $\geq 4$ , mutta joka on mahdollisimman vähätöinen laskennallisesti? Minkä kaavan valitset?