

KVANTTIMEKANIikka, loppukuulustelu, 22.2.2002

1. Olkoon $P_{ab}(t)$ todennäköisyys sille, että tilafunktion $\Psi(x, t)$ omaava hiukkanen löytyy

jostain väliltä $a < x < b$ ajanhetkellä t . a) Osoita, että jos $J(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x})$,

niin $\frac{dP_{ab}}{dt} = J(a, t) - J(b, t)$ b) Laske $J(x, t)$, kun $\Psi(x, t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$, missä A , λ ja ω ovat positiivisia ja reaalisia vakioita. c) Mikä on $J(x, t)$:n tulkinta?

2. Hiukkanen on δ -funktio potentiaaliuopassa, ts. $V(x) = -\alpha\delta(x)$, missä

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x \neq 0 \\ \infty & \text{kun } x = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Ratkaise hiukkasen sidotut energiatilat ($E < 0$) ja niitä vastaavat tilafunktiot.

Vihje: $\Delta(\frac{d\Psi}{dx}) = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}\Psi(0)$.

3. Kvanttimekaniikassa Hermiittiset muunnokset ($\hat{T}^\dagger = \hat{T}$) ovat keskeisessä asemassa.

a) Osoita, että Hermiittisen muunnoksen ominaisarvot ovat reaaliset.

Vihje: $\hat{T}|\alpha\rangle = \lambda|\alpha\rangle$, missä $|\alpha\rangle \neq |0\rangle$.

b) Funktioille $f(x)$ ja $g(x)$ operaattorin (\hat{T}) Hermiittisyys määritellään: $\langle f|\hat{T}g\rangle = \langle \hat{T}f|g\rangle$.

Laske onko derivaattaoperaattori $\hat{D} = \frac{d}{dx}$ Hermiittinen operaattori?

4. a) Määrittele hiukkasen spin ja spinin tilafunktioesitykset.

b) Olkoon elektronin spinin tila:

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}, \quad S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Määää normitusvakio A , ($\langle \chi|\chi\rangle = 1$), ja laske odotusarvot $\langle S_y\rangle = \chi^\dagger S_y \chi$ ja $\langle S_z\rangle = \chi^\dagger S_z \chi$.

5. Metallien vapaiden elektronien teoriaa voidaan tarkastella mm. elektronikaasumallin ja Blochin teorian avulla. Tarkastele kyseisten mallien ominaisuuksia. (Älä johda yksityiskoh-
taisesti, vaan kerro mallien perusoletukset ja mitä tuloksia niiden avulla saadaan.)