

Vastaa viiteen kysymyksen.

1. Operaattorin  $K$  singulaariarvohajotelma. a) Määritelmä. b) Ongelman  $Kf = g$  klassisten ratkaisujen ja miniminormiratkaisun yhteys singulaariarvohajoitelmaan.

2. Olkoon  $K : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ ,

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sekä  $g = [4 \ 0]^T$ .

- (a) Määrää operaattorin  $K$  singulaariarvohajotelma.
  - (b) Määrää miniminormiratkaisu  $K^\dagger g$ .
  - (c) Määrää Tihonov-regularisoitu ratkaisu  $f_\alpha$ , kun  $\alpha = 1$ .
3. Selvitä neljä perusmenetelmäluokkaa käänteisongelmien regularisoimiseksi sekä näihin liittyvät klassiset havaintovirheen  $\delta$  normiin liittyvät kysymykset, kun  $\delta \rightarrow 0$ .
  4. Määrää funktionaalin

$$F_\alpha(f) = \|Kf - g\|^2 + \alpha \|L(f - f_*)\|^2$$

minimoivaratkaisu variaatioperiaatteen avulla ( $\dim(K)$  voi olla ääretön).

5. Landweber-iteraatio. JOhda myös yläraja (konvergenssin takaavalle) parametrille  $\beta$ .
6. Olkoon  $g = Kf + \nu$ ,  $p_\nu(\nu) = \mathcal{N}(\nu_*, \Gamma_\nu)$ ,  $p_f(f) = \mathcal{N}(f_*, \Gamma_f)$  sekä  $p(f, \nu) = p_f(f)p_\nu(\nu)$ , missä  $\mathcal{N}$  viittaa normaalijakaumaan. Määrää posterioritiheys  $p(f|g)$  sekä tämän maksimoiva estimaatti  $f_{\text{MAP}}$ .