

Johdatus analyysiin

2. välikoe 3. joulukuuta 2002

Koeaika on 4 tuntia.

Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

1. Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt:

(a) $x^2 y' = xy + y^2$

(b) $y'' - 2y' + 2y = e^x + x^2$

2. Määrä seuraavien lukujonojen (x_n) raja-arvot.

(a) $x_n = \sqrt{n^2 + n} - n$

(b) $x_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}}$

(c) $x_n = \sqrt[n]{n^k} \quad k \in \mathbb{N}$

3. Määritellään jono (x_n) asettamalla

$$x_0 = 0 \quad \text{ja} \quad x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 1$$

Osoita, että jono (x_n) on kasvava ja rajoitettu. Mikä on jonon (x_n) raja-arvo?

4. (a) Tutki (tarkasti perustellen) seuraavien sarjojen suppenemista

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{(\ln 2)^k}$$

suppenemista.

(b) Funktiolla $f(x)$ on potenssisarjaesitys

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

Millä x :n arvoilla tämä potenssisarja suppenee?

Laske $f'(x)$. Mikä on näin saadun sarjan suppenemissäde?