

**Johdatus analyysiin** 1. välikoe 17.11.2006

1. (a) Määrää joukon  $A$  supremum ja infimum, kun

$$A = \{x_n \mid x_n = \frac{3n-3}{2n+5}, n \in \mathbb{N}\}.$$

- (b) Olkoon  $P(k)$  väite :  $2^k \geq k^3 + 1, k \in \mathbb{N}$ . Osoita, että  $P(k)$ :sta seuraa  $P(k+1)$  kaikilla  $k \geq 4$ . Millä  $k$ :n arvoilla  $P(k)$  on tosi ?

2. (a) Perustele sopivaa tulosta käyttäen, että polynomilla

$$p(x) = 3x^n + ax^{n-1} + x - 7$$

on ainakin yksi reaalinen nollakohta ( $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$  ovat tuntemattomia).

- (b) Olkoon funktio  $f$  määritelty jossakin pisteen  $a$  ympäristössä, derivoituva pisteessä  $a$  ja  $f(a) \neq 0$ . Johda derivaatan määritelmään nojautuen funktion  $g(x) = 1/f(x)$  derivaatan lauseke  $a$ :ssa ( $f$ :n ja  $f'$ :n avulla lausuttuna).

3. (a) Tutki, onko funktio

$$f(x) = x^4 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right), f(0) = 0,$$

derivoituva pisteessä  $x=0$ . Onko  $f$  jatkuvasti derivoituva pist.  $x=0$  ? (4p)

- (b) Perustele, että funktiolla

$$f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 20x^3 + 3$$

on jatkuva käänteisfunktio  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Missä pisteissä  $f^{-1}$  on derivoituva ja missä pisteissä  $f^{-1}$ :lla on derivaatta  $\pm\infty$  ? (2p)