

Johdatus analyysiin 1. välikoe 11.11.2005

1. (a) Määää joukon A supremum ja infimum, kun

$$A = \{x_n \mid x_n = (-1)^n \frac{3n}{4n+5}, n \in \mathbb{N}\}.$$

- (b) Perustele induktiotodistusta käyttäen kaava

$$1 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. (a) Tarkastellaan jonoa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, missä $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$, $x_1 = 3$. Osoita, että jono on vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Suppeneeko se? Jos suppenee, mikä on sen raja-arvo? (4p)

- (b) Olkoon $f(x) = \sin(x) \cos(1/x^3)$, $x \neq 0$. Voidaanko $f(0)$ määritellä niin, että f tulee jatkuvaksi 0:ssä? Jos voidaan, mikä pitää silloin olla $f(0)$? (2p)

3. (a) Tutki, onko funktio

$$f(x) = x^2(|x| + |x-1|)$$

derivoituva pisteissä $x=0$ ja $x=1$.

- (b) Osoita, että funktiolla

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 4x \cos x + (6 - x^2) \sin x$$

on tasan yksi globaali ääriarvopiste \mathbb{R} :ssä. Onko f :llä minimi vai maksimi siinä?