

**Ei taulukoita tahi muita katalookeja!**

1. Oletetaan, että maan vetovoiman kiihtyvyys  $g$  on tarkka ja kiinteä luku. Pudotetaan hiekkasäkki  $N$  kertaa korkeudelta  $h$  ja mitataan putoamisajat  $(T_1, \dots, t_N)$ . Fysikasta tiedetään, että

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

- (a) Oletetaan, että  $h$ :n systemaattinen virhe on  $h_0$  ja  $t$ :n systemaattinen virhe  $t_0$ . Molemmat ovat *summautuneet* mitattuun muuttujan arvoon. Esitä, kuinka  $g$ ,  $h_0$  ja  $t_0$  määrätään havainnoista  $(h_i, t_i)$ . Muodosta Jacobin matriisi.
- (b) Miten tilanne muuttuu, jos  $t$ :n systemaattinen virhe on muotoa  $kt$  (siis kello edistää tai jätättää). Muodosta Jacobin matriisi ja arvioi, voidaanko ongelma ratkaista.
2. Olkoon havaintomalli muotoa

$$z = H\theta + v \quad (2)$$

Olkoon  $\hat{\theta}$  jokin LS-ratkaisu. Tällöin

$$S = \left\{ \theta = \hat{\theta} + \omega \mid \omega \in N(H) \right\} \quad (3)$$

on kaikkien LS-ratkaisujen joukko.

- (a) Osoita, että jos  $\hat{\theta} \perp N(H)$ ,  $\hat{\theta}$  on miniminormiratkaisu.
- (b) Olkoon havaintomalli nyt

$$z_i = \theta_1 x_1 + \theta_2 + v_i \dots \quad (4)$$

Esitä tämä matriisimuodossa. On tehty kaksi havaintoa  $(x_i, z_i)$ ,  $(1, 1)$  ja  $(1, 2)$ . Osoita, että LS-ratkaisujen joukko on

$$S = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \theta_1 + \theta_2 = 3/2\} \quad (5)$$

- (c) Ratkaise  $N(H)$ . Piirrä  $(\theta_1, \theta_2)$  koordinaatistoon  $S$  ja  $N(H)$ . Päättele tästä kuviosta miniminormiestimaatti.
3. Olkoon havaintomalli

$$z_i = x + v_i \quad (6)$$

On tehty  $M$  havaintoa ja tiedetään, että  $\sigma_{v_i}^2 = i$ . Johda minimivarianssiestimaatin yhtälö. Laske estimaatti, kun on tehty havainnot  $z = (1, 2, 3)^T$ .

4. Havaintomalli on

$$z = h(\theta) + v \quad (7)$$

Johda ns. Gauss-Newton -iteraatio linearisoimalla kuvaus  $h(\theta)$ .

5. Osoita, että reguloitu ratkaisu

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \{ \|z - H\theta\|^2 + \alpha^2 \|L(H\theta)\|^2 \} \quad (8)$$

saadaan muotoon

$$\hat{\theta} = (H^T H + \alpha^2 H^T L^T L H)^{-1} H^T z \quad (9)$$