

Differentiaaliyhtälöiden loppukoe

3. joulukuuta 1999

Ratkaise viisi (5) tehtävää

1. Ratkaise differentiaaliyhtälöt

(a) $xy' + y = e^x$

(b) $y' = -(x + y)^2$

2. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' = -2xy' + 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

3. Määrää hyperbeliparven $xy = C (\neq 0)$ kohtisuorat leikkaajat. Piirrä kuva!

4. Olkoot y_1 ja $y_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ differentiaaliyhtälön

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua ja lisäksi $y_1(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Osoita, että funktiolla y_2 on korkeintaan yksi nollakohta.

5. Selitä mikä on Laplace-muunnos ja miten sitä voidaan käyttää lineaarisen vakioker-toimisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön ratkaisemisessa. Esimerkkinä ratkaise Laplace-muunnoksen avulla alkuarvotehtävä

$$y'' + y = 2e^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$$

(Tehtäväpaperin kääntöpuolella on Laplace-muunnostaulukko)

6. Mitä tarkoitetaan tason autonomisen systeemin kriittisellä pisteellä? Määrää systeemin

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 3y + xy \\ \frac{dy}{dt} = -x + y + \frac{1}{4}xy^2 \end{cases}$$

kriittiset pisteet sekä selvitä systeemin stabiilisuutta jossakin kriittisistä pisteistä.