

## tentti, huhtikuu 2003

1. Oletetaan, että maan vetovoiman kiihtyvyys  $g$  on tarkka ja kiinteä luku. Pudotetaan hiekkasäkki  $N$  kertaa korkeudelta  $h$  ja mitataan putoamisajat  $(t_1, \dots, t_N)$ . Fysiikasta tiedetään, että

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

- (a) Oletetaan, että  $h$ :n systemaattinen virhe on  $h_0$  ja  $t$ :n systemaattinen virhe  $t_0$ . Molemmat ovat *summautuneet* mitattuun muuttujan arvoon. Esitä, kuinka  $g$ ,  $h_0$  ja  $t_0$  määrätään havainnoista  $(h_i, t_i)$ . Muodosta Jacobin matriisi.
- (b) Miten tilanne muuttuu, jos  $t$ :n systemaattinen virhe on muotoa  $kt$  (siis kello edistää tai jätättää). Muodosta Jacobin matriisi ja arvioi, voidaanko ongelma ratkaista.
2. Olkoon havaintomalli muotoa

$$z = H\theta + v \quad (2)$$

Olkoon  $\hat{\theta}$  jokin LS-ratkaisu. Tällöin

$$S = \left\{ \theta = \hat{\theta} + w \mid w \in \mathcal{N}(H) \right\} \quad (3)$$

on kaikkien LS-ratkaisujen joukko.

- (a) Osoita, että jos  $\hat{\theta} \perp \mathcal{N}(H)$ ,  $\hat{\theta}$  on miniminormiratkaisu.
- (b) Olkoon havaintomalli nyt

$$z_i = \theta x_i + \theta_2 + v_i \quad (4)$$

Esitä tämä matriisimuodossa. On tehty kaksi havaintoa  $(x_i, z_i)$ ,  $(1, 1)$  ja  $(l, 2)$ . Osoita, että LS ratkaisujen joukko on

$$S = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta_1 + \theta_2 = 3/2\} \quad (5)$$

- (c) Ratkaise  $\mathcal{N}(H)$ . Piirrä  $(\theta_1, \theta_2)$  koordinaatistoon  $S$  ja  $\mathcal{N}(H)$ . Päättelä tästä kuviosta miniminormiestimaatti.
3. Johda yleistetyn PNS-kriteerin

$$l = \frac{1}{2}(z - H\theta)^T W(z - H\theta) \quad (6)$$

minimoiva ratkaisu, kun  $W$  on positiividefiniitti.

4. Satunnaisesta suureesta  $t$  on tehty viisi havaintoa  $(t_1, \dots, t_5)$ . Osoita, että
- (a) Ensimmäisen ja viimeisen havainon keskiarvo on harhaton estimaatti  $t$ :n odotusarvolle.
- (b) Painotettu keskiarvo on harhaton estimaatti  $t$ :n odotusarvolle.
- (c) Havaintojen painotetun keskiarvon keskivirhe on  $t$ :n variaanssin neliöjuuri, jos painovektori on  $w = (0, 0, 1, 0, 0)$ .

5. Havaintomalli on muotoa

$$z = h(\theta) + v \quad (7)$$

Muodosta Gauss-Newton -iteraatio modifioidun PNS-kriteerin

$$l_\alpha = \|z - h(\theta)\|^2 + \alpha\|\theta\|^2 \quad (8)$$

minimoimiseksi.