Matriisilaskenta
Loppukoe 12.12.2002

1. Määrää A^T, B ja $(AB^T)^T$, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

   Kun C on eräs 2×3 -matriisi, niin mitkä seuraavista matriisituloista on määriteltyjä?
   a) ACB
   b) $C^T A$
   c) $C^T B^T$

2. **a)** Reaalisen matriisin A pystyrivit ovat yksikkövektoreita, t.s. ne ovat pituudeltaan ykkösen suuruisia, kun pituus on vektorin komponenttien neliöiden summan neliöjuuri. Lisäksi ne ovat pareittain ortogonaalisia. Laske $A^T A$.

   b) Neliömatriiseja, jotka toteuttavat a)-kohdan tuloksen, kutsutaan ortogonaalisiksi matriiseiksi. Osoita, että $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ on 2×2 ortogonaalinen matriisi kaikilla reaaliluvuilla θ.

3. Millä a:n arvoilla vektorien

$$\chi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \chi_2 = \begin{bmatrix} a-1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}; \chi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ a-1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   virittämän $\mathbb{R}^3$:n aliavaruuden dimensio on kaksi?

4. Matriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -10 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ ominaisarvoja ovat $\lambda_1 = -1$ ja $\lambda_2 = -2$.

   a) Onko matriisilla muita ominaisarvoja? Jos niitä on, niin määrää muut ominaisarvot.

   b) Millä reaaliluvun α arvoilla matriisin $A + \alpha I$ yksi ominaisarvo on -4?

HUOM! Mukana tentissä saa olla taulukkokirja ja taskulaskin