MEKANIIKKA, 21.11.1997/JK

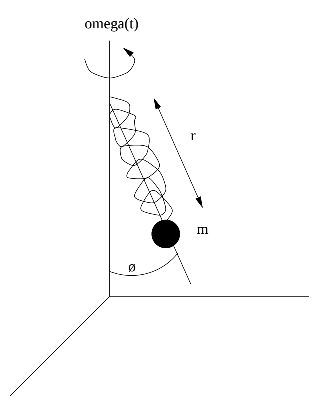
Loppukoe

1. Laske
   $(a)\nabla \cdot \vec{r}$
   $(b)\nabla \cdot (\vec{r}f(r))$
   Laske b-kohta, kun $f(r) = r^{n-1}$

2. Kappale pudotetaan etäisyydeltä r maan keskipisteestä. Mikä on kappaleen nopeus sen törmätessä maahan?

3. Tarkastele tasoheiluria, jonka muodostavat massa ja lanka, jonka alkuperäinen pituus on l_0. Lanka lyhenee pakkovoiman vaikutuksesta tasaisella nopeudella $\dot{l} = -b$. Kiinnityskohta pysyy samana. Muodosta Lagrangen funktio ja johda siitä heilahduskulman θ liikeyhtälö.

4. Moottori pyörittää yläpäästään kiinnitettyä tankoa pystyakselin ympäri kulmanopeudella $\omega(t)$ (joka ei ole vakio, mutta on tunnettu: rajoite), kuva 1. Tangossa on kuula, jonka massa on m ja joka on ripustettu tangon yläpäähän jousen (jousivakio k) välityksellä. Tanko ja jousi ovat massattomia. Määrää tilanteeseen liittyvä Lagrangen funktio ja edelleen liikeyhtälöt. Vihje: käytä pallokoordinaatistoa.



Kuva 1:

5. Tarkastellaan m_α-massaista partikkeleista koostuvaa jäykkää kappaletta. Osoita, että kappaleen liike-energia voidaan esittää (puhtaisiin) translaatio- ja rotaatioliikkeisiin liittyvien liike-energioiden summana.

Loppukoe

1. Kiihtyvyyden lauseke ympyräkoordinaatistossa tasossa on

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta, \tag{1}$$

missä $\vec{e}_r$ ja $\vec{e}_\theta$ ovat ko. koordinaatiston yksikkövektorit. Määrää funktiot a_r ja a_θ.

2. Raketti nousee kohtisuoraan gravitaatiokentässä (g = vakio). Polttoaineen polttonopeus on vakio $dm/dt = \alpha$ ja poistokaasujen nopeus raketin suhteen on u. Ilmanvastusta ei tarvitse ottaa huomioon. Alkunopeus on $v_0 = 0$ ja raketin alkupaino on m_0. Määrää raketin nopeus (pelkästään) vakioiden ja ajan funktiona.

3. Kappale liikkuu painovoimakentässä (g on vakio) pisteestä (x_1, y_1) pisteeseen (x_2, y_2). Määrää sellaisen pinnan parametrinen esitys $x = x(\theta), y = y(\theta)$, jota pitkin kappale liukuu pisteiden välin minimiajassa (brachistochrone-ongelma). Muuttujanvaihdos $x = a(1 - cos\theta)$ saattaa osoittautua käyttökelpoiseksi.

4. Osoita, että lyhin tie pisteiden (x_1, y_1, z_1) ja (x_2, y_2, z_2) välillä on pisteiden välinen suora. Vihje: käsittele kutakin koordinaattia parametrin $t \in [0, 1]$ funktiona erikseen.

5. Määrää vakiotiheyksisen a-säteisen puolipallon painopiste.

MEKANIIKKA, 13.12.1996/JK

Loppukoe

1. Olkoot $\vec{a} = \vec{a}(t)$ ja $\vec{b} = \vec{b}(t)$ parametrista t riippuvia vektoreita. Todista seuraava tulos

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} \tag{2}$$

2. Kappale liikkuu yksidimensioisessa avaruudessa gravitaatiokentässä. Liikettä vastustava voima on $F_r = -cv$, missä $c > 0$ on vakio. Mikä on kappaleen rajanopeus?

3. Käyrä $x = h(y)$, joka kulkee pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta, pyörähtää y-akselin ympäri. Määrää $h(y)$ siten, että pyörähdyskappaleen vaipan pinta-ala on pienin mahdollinen. Funktion $h(y)$ parametrisen muodon määrääminen riittää.

4. Kappale liikkuu R-säteisen sylinterin pinnalla. Olkoon piste $\vec{r} = 0$ sylinterin symmetria-akselilla. Kappaleeseen vaikuttaa voima $\vec{F} = -k\vec{r}, k > 0$. Määrää Lagrangen funktio ja Hamiltonin liikeyhtälöt.

5. Selvitä käsite efektiivinen potentiaali (keskeisliikkeessä) sekä mikä kvalitatiivinen ero on tähän liittyen yksi- ja useampiulotteisessa keskeisliikkeessä.

Tarvinnet intergraalia

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{1/2}} = cosh^{-1}(x/a) + C. \tag{3}$$

Loppukoe

1. Olkoot $\vec{a} = \vec{a}(t)$ ja $\vec{b} = \vec{b}(t)$ parametrista t riippuvia vektoreita ja $\varphi = \varphi(t)$ vastaavasti skalaari. Todista seuraavat tulokset

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b}$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi \vec{a}) = \varphi \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\vec{a}$$

2. Kappale liikkuu yksidimensioisessa avaruudessa. Kappaleen alkunopeus on v_0 ja liikettä vastustava voima on $F_r = -cv$, missä $c > 0$ on vakio. Kuinka pitkälle kappale kulkee ennen pysähtymistä?

3. Kappale liikkuu pystyyn asetetussa kartiossa, jonka kärkikulma on 2α. Määrää ongelmaan liittyvä Lagrangen funktio ja tämän avulla kappaleen liikeyhtälö.

4. Pallo (säde ρ) pyörii liukumatta vaakatasossa olevan R-säteisen sylinterin sisäpinnalla. Olkoon pallon alkunopeus sylinterin pituusakselia vastaan kohtisuorassa, jolloin ongelma on luonteeltaan kaksidimensionaalinen. Pallon hitausmomentti on I. Määrää Lagrangen funktio ja pallon liikeyhtälö. Vihje: valitse ensin koordinaatisto huolella (piirrä kuva) ja selvitä rajoite.

5. Tarkastellaa kahden partikkelin systeemiä keskeisliikkeen tapauksessa. Osoita, että

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2}F(r),$$

missä $F(r)$ on (keskeis-) voima, μ on redusoitu massa, r on partikkelien etäisyys ja l on kulmamuuttujaan θ liittyvä yleistetty liikemäärä (vakio).