Moniulotteisen analyysin alkeet Loppukoe 15.5.2001

Vastaa alla olevista tehtävistä neljään (4) .

l. Olkoon $f(x,y)=\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3$. Laske suoraan määritelmään nojautuen f:n osittaisderivaatat pisteessä (0,0) sekä samoin f:n suuntaisderivaatta $\partial_U f(0,0)$ suuntaan $U=(1,1)/\sqrt{2}$. Vertaa lukuja $\nabla f(0,0)\cdot U$ ja $\partial_U f(0,0)$.

2. Määrää funktion $f(x,y)=xy$ suurin ja pienin arvo ellipsin $3x^2$-$2xy$-f-$3y^2$ = 1 rajoittamassa joukossa (reunakäyrä mukaan luettuna). Millä perusteella ko. ääriarvot ovat olemassa?

3. Laske painopiste $\left(\int_\gamma x\rho ds, \int_\gamma y\rho ds\right)/M$ $(M=\int_\gamma \rho ds)$ puoliympyrän kaarelle $x^2+y^2=1, x\geq 0$, jonka tiheys ρ on vakio.

4. Laske integraali $\int_A f$ funktiolle $f(x,y)=x(x^2+y^2)^{5/2}$, kun

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}\mid x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}.$$

5. Olkoon $f(x,y)=(2xy-x^2, x+y^2)$ ja γ käyrien $y=x^2$ ja $x=y^2$ muodostama (paloittain jatkuvasti derivoituva) umpinainen polku. Laske polkuintegraali $\oint_\gamma f\cdot d\gamma$.

   (a) suoraan määritelmää käyttäen ja (b) Greenin kaavaa käyttäen.

Huom. (a) Tentissä saa olla mukana taulukkokirja ja laskin.
(b) Tehtävien ratkaisut tulevat Matematiikan ilmoitustaululle (Microteknia).