Lineaarialgebra Loppukuulustelu 23.5.2006

Oheisista tehtävistä arvostellaan neljä (4) parasta vastausta.

1. (a) Olkoon $H \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetristen matriisien muodostama joukko. Osoita, että H on aliavaruus. Määrää H:lle jokin kanta ja dim(H), kun n=2.

   (b) Tutki, onko funktiojoukko $\{e^x, \sin x, \cos x\}$ lineaarisesti riippumaton.

2. Tarkastellaan lineaarikuvausta $A : P_2 \to P_2$ s.e. $(Ap)(t) = p(t) - tp'(t)$. Määrää A:n matriisi M standardikannan $B = \{1, t, t^2\}$ suhteen . Onko A injektio ja/tai surjektio ? Määrää polynomin $p(t) = 1 + 2t + 3t^2$ kuva Ap suoraan A:n määritelmällä sekä myös matriisia M (ja ko. koordinaattivektoreita) käyttäen.

3. Tarkastellaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tutki, onko A diagonalisoituva.

4. (a) Osoita, että sisätuloavaruuden ortonormeerattu joukko {u,v,w} on lineaarisesti riippumaton. (2p)

   (b) Muodosta vektoreista (0,1,0), (1,2,2) ja (2,1,2) (niiden lineaarikombinaatioina) ortonormaali joukko, joka virittää saman aliavaruuden . (4p)

5. Määrää xy-tason ellipsin $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6$ yhtälö pääakselikoordinaatistossa sekä puoliakseleiden suunnat ja pituudet. Piirrä kuvio.

Huom. Mukana saa olla jokin taulukkokirja ja (graafinenkin) laskin. Kurssin palautelomake löytyy kurssin nettisivulta.

Jotakin kaavoja ja tuloksia :

$dim(H + K) = dimH + dimK - dim(H \cap K)$, $dimE = dimKer(A) + dimR(A)$

$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k q_k^T$ (A symmetrinen, q-vektorit ortonormeerattuja)

$M(A; B') = S^{-1}M(A; B)S,\ B' = BS,\ M(A \circ A') = M(A)M(A'),\ R(A)^{\perp} = Ker(A^T)$