Lineaarialgebra Loppukuulustelu 9.5.2003

Oheisista tehtävistä arvostellaan neljä (4) parasta vastausta.

1. (a) Olkoon $H \subset \mathcal{F}$ niiden reaalifunktioiden f joukko, joille $f(t) \geq 0 \; \forall \, t \in \mathbb{R}$. Tutki, onko H $\mathcal{F}$:n aliavaruus. (2p)

   (b) Joukko $\{v_1, v_2, v_3\}$ on aliavaruuden H kanta. Olkoon $w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$, missä $a_i \in \mathbb{R}$, $a_3 \neq 0$. Onko joukko $\{v_1, v_2, w\}$ H:n kanta ? (4p)

2. Tarkastellaan kuvausta $A : P_4 \to P_4$, missä $A(p)(t) = p(t) - p(-t)$. Perustele, että A on lineaarikuvaus. Määrää Ker(A) sekä sen ja R(A):n dimensiot . Onko A injektio ja/tai surjektio ?

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 1 & 0.6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Laske A:n ominaisarvot ja -vektorit. Tutki, minkä suuntaista vektoria lauseke $A^k u$ lähenee, kun $k \to \infty$? ($u \in \mathbb{R}^3$)

4. Matriisin A singulaariarvot ovat $s_1 = 3/\sqrt{2}$, $s_2 = 1/\sqrt{2}$, $s_3 = 0$. Vastaavat singulaarivektorit ovat $u_1 = \alpha[-1, 0, 1]^T$, $u_2 = [0, 1, 0]^T$, $u_3 = \alpha[1, 0, 1]^T$, $v_1 = u_3$, $v_2 = u_2$, $v_3 = u_1$, $\alpha = 1/\sqrt{2}$.

   (a) Määrää pns-ratkaisu $\hat{x}$ yhtälöryhmälle Ax=b s.e. $\|\hat{x}\|$ on minimissään, kun $b = \alpha[2, 1, 3]^T$.

   (b) Onko $\hat{x}$ myös tarkka ratkaisu ? Määrää ko. yleinen pns-ratkaisu .

   (Vihje : $A^\dagger = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{s_i} v_i u_i^T$.)

5. (a) Osoita, että reaaliselle matriisille A on $Ker(A^T A) = Ker(A)$. (Vihje: Tutki Au:n normin neliöä jne.)

   (b) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tutki A:ta vastaavan neliömuodon q(x) definiittisyys.

Huom. Mukana saa olla jokin taulukkokirja ja laskin . Muista perustelut !
Tehtävien ratkaisut tulevat tentin jälkeen Matematiikan ilmoitustaululle.