Lineaarialgebra Loppukuulustelu 3.4.2003

Oheisista tehtävistä arvostellaan neljä (4) parasta vastausta.

1. (a) Olkoon joukko $\{u, v, w\}$ LI . Tutki, onko joukko $S = \{u+v, v+w, w+u\}$ LI . Onko S LI, jos vektorin u+v paikalla on u-v ?

   (b) Olkoon $H \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ vinosymmetristen matriisien A $(a_{ij} = -a_{ji})$ muodostama joukko . Osoita, että H on aliavaruus. Määrää H:lle jokin kanta sekä dim(H), kun n=3.

2. Olkoon $A : P_2 \to \mathbb{R}^3$ s.e. Ap = (p(-2), p(1), p(2)) . Osoita (määritelmän nojalla), että A on lineaarikuvaus. Määrää A:n matriisi M P_2:n standardikannan $\{1, t, t^2\}$ ja $\mathbb{R}^3$:n luonnollisen kannan suhteen . Onko A injektio ja/tai surjektio ?

3. (a) Tarkastellaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Päättele, tutkimalla arvojoukon $R(A-\lambda I)$ dimensiota (kullekin ominaisarvolle) , onko A diagonalisoituva. (4p)

   (b) Olkoon matriisin Q sarakkeet ortonormeeratut. Osoita, että tällöin $\|Qu\| = \|u\|$. (2p)

4. (a) Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Johda sopivien sisätuloavaruuden tulosten nojalla normaaliyhtälö, joka antaa pns-ratkaisun yhtälöryhmälle Ax=b.

   (b) Määrää pns-ratkaisu $\hat{x}$ yhtälöryhmälle $Ax = b$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   Määrää myös pns-approksimaation hyvyyttä kuvaava determinaatiokerroin $R^2 = \left\|\hat{b}\right\|^2 / \|b\|^2$.

5. Piirrä xy-tason käyrä $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$. Määrää ensin sen yhtälö pääakselikoordinaatistossa, pääakseleiden suunnat ja puoliakseleiden pituudet.

Huom. Mukana saa olla jokin taulukkokirja ja laskin .