Lineaari- ja matriisialgebran toinen välikoe
30. maaliskuuta 2000

Ratkaise neljä (4) tehtävää.

1. Olkoon V korkeintaan toista astetta olevien polynomien avaruus ja $L : V \to V$ lineaarikuvaus $Lp(x) = x\,p'(x)$.
   (a) Osoita, että polynomit $p_1(x) = 1 - x$, $p_2(x) = 1 + x$ ja $p_3(x) = x2$ muodostavat avaruuden V kannan.
   (b) Määrää kuvauksen L matriisi em. kannan suhteen.
   (c) Onko L injektio?

2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 0 & 2 & 0 \\ p & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   Millä p:n arvoilla
   (a) $\lambda = 1$ on A:n ominaisarvo? Mikä on tällöin vastaava ominaisavaruus?
   (b) $x = (2,1, 2)$ on A:n ominaisvektori? Mikä on tällöin vastaava ominaisarvo?

3. Olkoon $L : \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^4$ lineaarikuvaus, jonka matriisi standardikannoissa on

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Mitkä ovat L:n ytimen ker L ja kuva-avaruuden $R(L)$ *d*imensiot? Konstruoi $R(L)$:lle ortonormaali kanta.

4. Vapaamuotoinen kirjoitelma aiheesta: Matriisin diagonalisointi. (Kerro mitä diagonalisoinnilla tarkoitetaan ja mitä iloa siitä on. Esittele myös aiheeseen liittyviä keskeisiä käsitteitä ja tuloksia. Lauseiden todistuksia ei tarvitse esittää, mutta valaise esitystäsi esimerkein.)

5. Oletetaan, että A on *antihermiittinen*, eli $B = -A$, B on A:n hermiittinen konjukaatti.
   (a) Osoita, että iA on hermiittinen.
   (b) Osoita, että A on unitaarisesti diagonalisoituva ja että sen ominaisarvot muotoa $A = i\alpha$, missä $\alpha \in \mathrm{R}$.