Lineaari- ja matriisialgebran ensimmäinen välikoe

16. helmikuuta 2000

Ratkaise neljä (4) tehtävää.

1. Lineaarikuvauksesta F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiedämme, että $F(1,1) = (1,1)$ ja $F(2,1) = (1, 2)$.
   (a) Mikä on F:n matriisi (standardikannassa)?
   (b) Mikä on pisteen (1, -2) alkukuva $F^{-1}(1, -2)$?
   (c) Onko F bijektio?
   (d) Mikä on suoran $L = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 3x_1 \}$ kuvajoukko $F(L)$?
2. Selitä miten yhtälöryhmä ratkaistaan Gaussin ja Jordanin menetelmällä käyttäen esimerkkinä yhtälöryhmää
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$
3. Olkoon A 3 x 3-matriisi. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia ja mitkä epätosia. Esitä lyhyt perustelu tai anna vastaesimerkki.
   (a) $A^2 = I$ jos ja vain jos $(A - I)(A + I) = 0$.
   (b) Jos $A^2 = I$, niin $A = \pm I$.
   (c) Jos $A^T = -A$, niin $\det A = 0$.

4. Merkitään $\det(v_1,v_2,v_3)$:lla sen 3 x 3-matriisin determinanttia, jonka sarakevektorit ovat v^1, v^2 ja v^3. Laske $\det(v_1-2v_2, 3v_3+v_1, v_2)$, kun tiedämme, että $\det(v_1, v_2, v_3) = 1$.
5. Missä seuraavista W on vektoriavaruuden V aliavaruus? Myönteisissä tapauksissa keksi W:lle jokin kanta. (Yhdessä tapauksessa perustele tarkkaan, että kyseessä on todella kanta.)
   (a) $V = \mathcal{M}_{3X3}$ ja $W = \{A \in V \mid A + A^T = 0\}$.
   (b) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (polynomit astetta ≤ 3) ja $W = \{p \in V \mid p(1) = 1\}$
   (c) $V = \mathbb{R}^4$ ja $W = \{x \in V \mid x = (a + b + c, 2a + 2b, 0, a + b - c), a, b, c \in \mathbb{R}\}$.