Johdatus analyysiin. 2. välikoe 23.12.2005
Vastaa kaikkiin kolmeen (3) tehtävään. Jokaisesta tehtävästä max. 6p

1. Vastaa allaoleviin kohtiin.

   (a) Määrittele funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (Riemann-)integroituvuuden ja integraalin käsite (välillä $[a,b]$) *joko* lähtien ylä- ja alasummista jne. tai *vaihtoehtoisesti* Riemannin summia käyttäen. (2p)

   (b) Laske integraali
$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^3+1)}\mathrm{d}x$$
   tekemällä ensin sijoitus $t = x^3$ ja käyttämällä sitten osamurtohajotelmaa. (4p)

2. Mikä on käyrän $r = 1 + \sin(2\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ sisälle jäävän joukon pinta-ala? (6p)

3. Sopivia suppenevuustestejä käyttäen vastaa seuraaviin kohtiin.

   (a) Tutki suppeneeko sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^k}.$$
   (3p)

   (b) Osoita, että sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}$$
   suppenee. Suppeneeko se itseisesti? (3p)

Kaavoja:

- $\star$ $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$, $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$
- $\star$ $\int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta$
- $\star$ $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\mathrm{d}\theta$
- $\star$ $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$.