Integraalilaskenta

Loppukoe 19.04.2001

Laske seuraavista viidestä tehtävästä **neljä.**

1. Määrää sen kappaleen tilavuus (kts. Kuva 1), jota rajoittavat pallo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, ja sylinteri $x^2 + y^2 = ax$.
   Vihjeitä:
   1) xy-tason napakoordinaatistossa $z = f(r,\varphi) = ?$
   2) $0 < \varphi < \pi/2 \Rightarrow 0 \le r \le g(\varphi) = ?$

2. Määrää $\mathbb{R}^3$:n yksikköpallon yli funktion $f(x) = 1 + \|x\|^4$ integraali, t.s.

$$\int_{B_3(0,1)} (1 + \|x\|^4) = ?$$

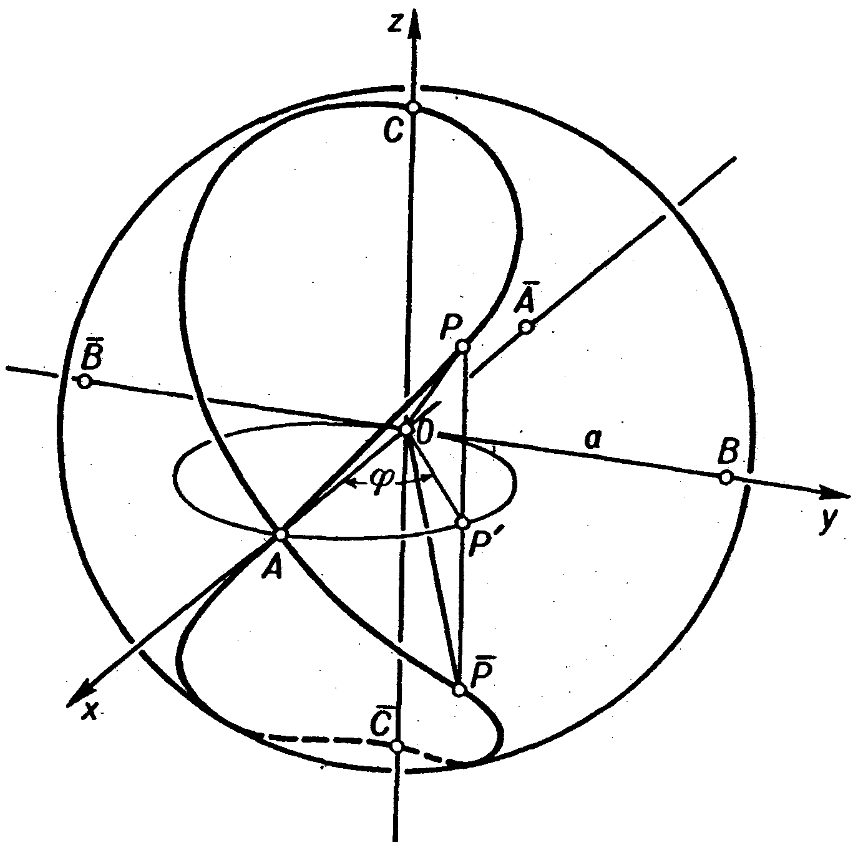
3. Määrää funktion $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1 x_2)$ polkuintegraali Kuvan 2 polkua pitkin esitetyssä suunnassa.

4. Osoita, että funktiolla $f = (x_1^3 x_2, x_3^2, -3x_1^2 x_2 x_3)$ on vektoripotentiaali, ja määrää sellainen, t.s. funktio g, mikä toteuttaa ehdon $\nabla \times g = f$.

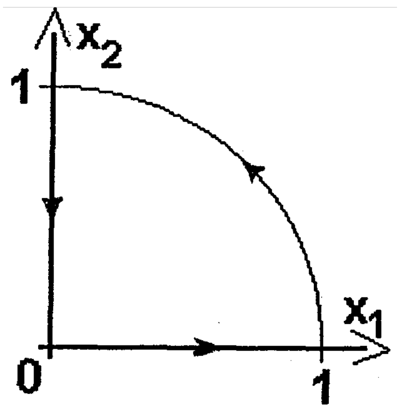
5. Osoita, että funktiolla $f : G \to \mathbb{R}^2$, jossa $G = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$, ja

$$f(x, y) = \left(\frac{x + 2y}{(x + y)^2}, \frac{y}{(x + y)^2} \right)$$

   on potentiaalifunktio u, ja määrää se.



Kuva 1.



Kuva 2.

1. $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$
$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

$$x \times y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

2. $g(r,\varphi,\theta) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$:
$\left|J_g\right| = r^2\left|\sin\theta\right|$

3. $\int_\gamma f \cdot d\gamma = \int \left\langle (f \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \right\rangle dt$

4. $u(x) = \int_0^1 \left\langle f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \right\rangle dt$

5. $g(x) = \int_0^1 t f(x_0 + t(x - x_0)) \times (x - x_0) dt$

6. $\nabla \cdot f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3$

7. $f = (f_1, f_2, f_3)$:

$$\nabla \times f = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$