Integraalilaskenta LT 14.05.1998

1. Olkoon $f : I := [0,1] \times [-1,1] \to \mathbf{R}$ s.e.

$$f(x) = \begin{cases} x_2^5 & x_1 \in \mathbf{Q} \\ 0 & muuten \end{cases}$$

Tutki, ovatko iteroidut integraalit

$$\int_0^1 (\int_{-1}^1 f(x)dx_2)dx_1, \int_{-1}^1 (\int_0^1 f(x)dx_1)dx_2, \int_{-1}^1 (yla \int_0^1 f(x)dx_1)dx_2$$

olemassa. Onko integraali $\int_I f(x)dx$ olemassa? Myönteisessä tapauksessa määrää integraalien arvot.

2. Oletetaan, että $A_i, i \in \Gamma$ ovat avaruuden $\mathbf{R}^n$ jordan-mitallisia joukkoja s.e. $A := \bigcup_{i \in \Gamma} A_i$ on rajoitettu. Tutki, onko A jordan-mitallinen, kun

   (a) Γ on äärellinen ($\Gamma = 1, \ldots, n$)

   (b) $\Gamma = \mathbf{N}$ (=luonnolliset luvut).

3. (a) Oletetaan, että funktiolla $f \in C(G)$ on alueessa G potentiaalifunktio. Osoita, että $\oint_\gamma f\gamma = 0$, kun $\gamma : I \to G$ on jatkuvasti derivoituva umpinainen polku.

   (b) Tutki, onko funktiolla $f : \mathbf{R}^3 \Rightarrow \mathbf{R}^3$

$$f(x) = (6x_1 + 2x_2^2, 4x_1x_2 - x_3^2, -2x_2x_3)$$

   potentiaalifunktio u. Myönteisessä tapauksessa määrää u.

4. Määrää funktion $f(x) = (x_3, x_1 + x_2, -x_1)$ pintaintegraali $\int_S f \cdot dn$, kun S on se sylinterin pinnan $x_1^2 + x_3^2 = 9$ osa, jossa $x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq 4, x_3 \geq 0$.

5. Olkoon $A \subset \mathbf{R}^3$ kuten Gaussin lauseessa ja olkoon $\overline{A} \subset D \subset \mathbf{R}^3$. Oletetaan, että $u \in C^2(D)$ ja että $\Delta u := \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f$. Osoita, että

$$\int_{+\partial A} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_A f dx.$$

Määrää saatua tulosta käyttäen $\int_{+\partial A} \frac{\partial u}{\partial n} dS$, kun $A = B_3(0,R)$, ja $u(x) = ||x||^2$.