Funktioteoria LT 27.3.98

1. (a) Määrää $(-1+\sqrt{3}i)^{10}$ muodossa $x+iy$

   (b) Osoita, että z on yhtälön $z^n = \omega$ ratkaisu, joss

$$z = |\omega|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{Arg\omega}{n} + \frac{k}{n}2\pi}, k = 0, \dots, n-1$$

2. Olkoon $a \in]-1,1[, \theta \in \mathbf{R}$. Osoita, että

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \sin(k\theta) = \frac{-a\sin(\theta)}{1-2a\cos\theta + a^2}$$

   tutkimalla sarjaa $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ pisteessä $z = ae^{i\theta}$.

3. Tutki, onko kuvaus $f : A := \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}$ analyyttinen, kun

   (a) $f(z) = \frac{1}{z} + \overline{z}$

   (b) $f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

   Onko kuvauksella f integraalifunktio alueessa A?

4. Määrää kuvauksen $f(z) = z\cos(\frac{1}{z})$ Laurentin sarjakehitelmä pisteessä $z = 0$. Tutki erikoispisteen $z = 0$ luonne. Määrää

$$\oint_{\gamma} z^n f(z) dz$$

   kun γ on yksikköympyrän kehää vastaava polku.

5. (a) Oletetaan, että $f \in C(\lambda)$. Olkoon $g(x) = e^{ax}f(x)$, missä $a \in \mathbf{R}$. Osoita, että

$$(Lg)(\xi) = (Lf)(\xi - a), \xi > a + \lambda$$

   missä L on reaalinen Laplace muunnos.

   (b) Määrää kuvauksen $F(\xi) = \frac{\xi}{\xi^4 - a^4}$ Laplace käänteismuunnos, kun $a > 0$.