FOURIER-ANALYYSI, 9.11.2001/MV, Lopputentti

Tehtävissä 1 ja 4, maksimipistemäärä on 8 pistettä, muissa 6 pistettä.

1. a) Olkoon $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ s.e. $f(x)=x^2$. Määrää funktion f (reaalinen) Fourier-sarja. Esittääkö saatu sarja funktiota f jokaisessa pisteessä $x\in[-\pi,\pi]$? Perustelut.

   h) Määrää kohdan a) tulokseen perustuen Parsevalin kaavan avulla summa $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$.

2. Määrää reuna arvotehtävän

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, 0<x<\pi, y>o$$
$$u(0,y)=u(\pi,y)=0, y>0$$
$$u(x,0)=1, 0<x<\pi$$

   rajoitettu ratkaisu Fourier-sarja -analyysin avulla.

3. Todista seuraava lause. Oletetaan, että f on derivoituva. Oletetaan edelleen, että $f, f'\in L^1\cap\Re$, sekä $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$. Tällöin

$$\hat{f}'(\xi)=i\xi\hat{f}(\xi)\quad\forall\xi\in\mathbb{R}$$

4. a) Osoita, että kuvauksen $f(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$ Fourier-muunnos on

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}$$

   b) Määrää Parsevalin kaavan avulla integraali

$$\int_0^\infty \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\,d\xi$$

   Käytä hyväksesi a)-kohdan tulosta ja tehtävässä 3 esitettyä lausetta.