

Fourier-analyysi Loppukuulustelu 3.2.2006

Huom. Palauta oheinen lisämateriaali (2 sivua) tenttipaperisi kanssa. Lisäksi mukana saa olla taulukkokirja ja (graafinenkin) laskin.

- (a) Tarkastellaan funktion $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq \pi$, reaalista Fourier-sarjaa (ks. lisämateriaali), missä $a_0/2 = \pi^2/3$, $a_k = 4(-1)^k/k^2$. Päättele sarjan termeistä ym., mitä jaksollista funktiota sarja esittää \mathbb{R} :ssä? Missä pisteissä sarjan summa on $f(x)$? Piirrä kuvio.
(b) Laske edellä mainitusta sarjasta termeittäin integroimalla trigonometrinen sarja $S(x)$. Mitä jaksollista funktiota $S(x)$ esittää \mathbb{R} :ssä? Piirrä kuvio.

- Määrää Fourier-sarjan avulla osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

rajoitettu ratkaisu ehdoilla $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(s, 0) = 1$, kun $t > 0$, $0 < s < \pi$. (Vihje: Johda ensin differentiaaliyhtälöt $X'' + k^2 X = 0$, $T'' - k^2 T = 0$, missä $u(s, t) = X(s)T(t)$, $k \in \mathbb{N}$, jne.)

- (a) Laske Fourier-muunnos funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1 - x^2, & |x| \leq 1. \end{cases}$$

- (b) Laske Parsevalin kaavan avulla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin a - a \cos a}{a^3} \right)^2 da.$$

Käytä hyväksesi (a)-kohtaa.

- Tarkastellaan konvoluutiota $h = g * f$, kun $g(x) = e^{-2|x|}$ ja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Osoita, että $h(t) = (4e^{-t}/3 - e^{-2t})/\sqrt{2\pi}$, $t > 0$ ja $h(t) = e^{2t}/\sqrt{18\pi}$, $t < 0$.

- Ratkaise Fourier-muunnoksen avulla (formaalisti) differentiaaliyhtälö $y'' - 4y = f$, missä f on annettu tehtävässä 4. Käytä hyväksi tehtävän 4 tulosta! Tarkista laskemalla, että saamasi y on todella ko. ratkaisu.