FEM lopputentti, 28.3.2003 klo 8-12, E27

1. Olkoon $\langle u,v\rangle_E := a(u,v)$, missä $a : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ symmetrinen, rajoitettu ja X-koersitiivinen bilineaarimuoto. Tällöin $a(u,v)$:lle on voimassa

$$a(u-u_h, v) = 0, \ \forall v \in X_h'$$

Osoita, että residuaalille $u - u_h$ pätee

$$\|u-u_h\|_E = \inf_{v\in X_h} \|u-v\|_E.$$

Miten kuvailisit tulosta geometrisesti?

2. Tarkastellaan väliin $G =]0,1[$ liittyvää reuna-arvotehtävää

$$\begin{aligned} -u'' + u' + u &= f && (1)\\ u'(0) = u(1) &= 0 && (2) \end{aligned}$$

a) Johda vastaava variationaaliyhtälö
b) Osoita, että bilineaarimuoto on rajoitettu ja $H^1(G)$-koersitiivinen.

3. Tarkastellaan reuna-arvotehtävää

$$\begin{aligned} -\mu\Delta u + \beta_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + u &= f, \ x \in G && (3)\\ u|_{\partial G} &= 0 && (4) \end{aligned}$$

missä $G \subset \mathbb{R}^2$, sekä μ ja β_i ovat positiivisia vakioita. Muodosta variationaaliyhtälö ja vastaava FEM-matriisiyhtälö. Onko kyseessä symmetrinen variationaaliongelma (todistus)?

4. Olkoon $G =]0,1[\times]0,1[$. Tarkastellaan hyperbolista epähomogeenista reuna-arvotehtävää

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0, \ x \in G, t > 0 && (5)\\ u(x,t) &= \sin(\pi(\sqrt{2}t + x_1 + x_2)), \ x \in \partial G, \ t > 0 && (6)\\ u(x,0) &= \sin(\pi(x_1 + x_2)), \ x \in G && (7)\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sqrt{2}\pi\cos(\pi(x_1+x_2)) && (8) \end{aligned}$$

Palauta reunaehto homogeeniseksi muuttujanvaihdolla $U = u - \sin(\pi(\sqrt{2}t + x_1 + x_2))$. Muodosta saadun ongelman FEM differentiaaliyhtälöryhmä.

5. Tarkastellaan 1D elementtikohtaisen integraalin

$$\int_{x_{e,1}}^{x_{x,2}} (\phi_{e,j}\phi_{e,k} + \phi_{e,j}'\phi_{e,k}')dx$$

laskemista. Millaisen kuvauksen avulla muunnat integraalin laskemisen peruselementin $[0,1]$ yli tapahtuvan integraalin laskemiseksi? Osoita, että ko. kuvauksen avulla kantafunktiot $\phi_(e,j)$ muuttuvat peruselementin kantafunktioiksi $\phi_{0,j}$. Mihin muotoon derivaatat $\phi_{e,j}'$ muuttuvat?