ESTIMOINTITEORIA, 27.3.2002, MV

Lopputentti

Viimeisen tehtävän maksimipistemäärä on 10 pistettä, muissa 6.

1. Olkoon satunnaismuuttujien $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ yhteistiheys muotoa

$$f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

a) Määrää reunatiheys $f_{\mathbf{y}}(y)$.
b) Määrää ehdollinen tiheys $f_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}(x|y)$ ja odotusarvo $E\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\}$. Mitä on $E\{\mathbf{x}|\mathbf{y}=1\}$?
c) Ovatko satunnaismuuttujat $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ riippumattomia? Perustele.

2. a) Osoita, että MS-estimaattori voidaan esittää muodossa

$$\hat{\theta}_{MS} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \theta f(z|\theta) f(\theta)\, d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} f(z|\theta) f(\theta)\, d\theta}$$

b) Määrää $\hat{\theta}_{MS}$ ja $\hat{\theta}_{MAP}$ skalaariparametrille θ, kun havaintomalli on muotoa

$$z = \ln\theta + v$$

missä

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

ja

$$f(v) = \begin{cases} e^{-v}, & v \geq 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

3. Osoita, että MS-estimaattori $\hat{\theta}_{MS}$ on harhaton.

4. Oletetaan, että satunnaisvektorit θ ja v ovat Gaussisia s.e. $\eta_v = 0$ ja lisäksi θ ja v ovat riippumattomia. Olkoon meillä havaintomalli

$$z = H\theta + v$$

missä H on tunnettu matriisi. Satunnaisvektorille θ määrätään kolme estimaattoria

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_A &= (H^{\mathrm{T}} C_v^{-1} H + C_\theta^{-1})^{-1} (H^{\mathrm{T}} C_v^{-1} z + C_\theta^{-1} \eta_\theta) && (1) \\ &= \eta_\theta + (H^{\mathrm{T}} C_v^{-1} H + C_\theta^{-1})^{-1} (H^{\mathrm{T}} C_v^{-1} (z - H\eta_\theta)) && (2) \\ \hat{\theta}_B &= (H^{\mathrm{T}} C_v^{-1} H)^{-1} (H^{\mathrm{T}} C_v^{-1} z) && (3) \\ \hat{\theta}_C &= (H^{\mathrm{T}} H)^{-1} (H^{\mathrm{T}} z) && (4) \end{aligned}$$

a) Nimeä kyseiset estimaattorit. Jos samaan estimaattoriin liittyy useampi nimike, kerro ne kaikki.
b) Millä oletuksilla päästään $\hat{\theta}_1$:stä $\hat{\theta}_2$:een ja edelleen $\hat{\theta}_3$:een? Mitä ko. oletukset tarkoittavat käytännössä?
c) Olkoon $H = (11), \theta = (\theta_1, \theta_2), z = 3.3, \eta_v = 0$ ja $C_v = 0.2$. Sinulla on etukäteisoletus $(1, 1)$ parametrivektorin θ arvoksi. Oletuksessasi luotat enemmän θ_2:n arvioon. Lisäksi oletat, että θ_1 ja θ_2 ovat korreloimattomia. Keksi sopivat parametrit priorille ja laske θ:lle estimaattori $\hat{\theta}_A$. Hyödynnä matriisinkääntölemmaa

$$(H^{\mathrm{T}}R^{-1}H + P^{-1})^{-1}H^{\mathrm{T}}R^{-1} = PH^{\mathrm{T}}(R + HPH^{\mathrm{T}})^{-1}$$

d) Olkoon $C_v = \sigma_v^2 I$ ja $C_\theta = \sigma_\theta^2 I$ missä I on yksikkömatriisi. Osoita, että $\hat{\theta}_A$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\hat{\theta}_A = (H^{\mathrm{T}}H + \alpha I)^{-1}(H^{\mathrm{T}}Z + \alpha\eta_\theta)$$

missä $\alpha = \sigma_v^2/\sigma_\theta^2$.