Differentiaalilaskenta 1. välikoe 24.10.2000

1. (a) Tutki, onko joukko $A=\left\{x\in\mathbb{R}^3 | x_3^2\le x_1^2+x_2^2\le x_3\right\}$ kompakti.

   (b) Olkoon $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ s.e. $f(x)=\left\{x_1\cos x_3, x_2^2 x_3, x_1 e^{x_3}\right\}$. Perustele suuntaderivaatan $\partial_u f(1,2,0)$ olemassa olo suuntaan $u=(1,0,1)$ ja määrää se.

2. Tutki, onko funktio $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ s.e. $f(x)=|x_1|x_2$ differentoituva pisteissä (0,0) ja (0,1). Onko f jatkuvasti differentoituva näissä pisteissä?

3. (a) Määritellään $f(x,t)=(\ln(xy), x^2, y^{-1})$ ja $g(r,t)=(r\cos t, r\sin t)$. Perustele funktion $h=f\circ g$ differentoituvuus pisteessä $(sqrt\ 2, \pi/4)$ ja määrää h:n Jacobin matriisi tässä pisteessä.

   (b) Määrä funktiolle $f(x,y)=e^{xy}\sin(x^2+y)$ astetta 4 oleva Taylorin polynomi kehitettynä origon suhteen. Määrä myös $\partial_1\partial_2^3 f(0,0)$ ja $\partial_1^2\partial_2^2 f(0,0)$.