Differentiaalilaskenta 1. välikoe 9.11.2001

1. (a) Tutki, onko joukko $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x_2^2 \leq \left| x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^4 \right| \leq 9 \right\}$ suljettu. Onko A kompakti?

   (b) Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ differentioituva funktio, jolle f(0,0,0)=(1,2). Määrää funktion $g(x) = (1 + x_1 + x_2 \cos x_3) f(x)$ Jacobin matriisi $A_g(0, 0, 0)$, kun $A_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s.e. $f(x) = x_1 x_2 \sin(1/x_2)$, $x_2 \neq 0$, $f(x_1, 0) = 0$. Määrää f:n osittaisderivaatat niissä pisteissä, joissa ne ovat olemassa . Missä pisteissä f on differentioituva ?

3. (a) Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differentioituva funktio, jonka osittaisderivaatoille pätee : $|\partial_k f(x)| \leq k \forall x \in \mathbb{R}^3$. Arvioi arvon f(a) laskemisessa tulevan virheen ylärajaa, kun a:n komponenttien mittausvirheille pätee $|\Delta a_k| \leq 0.01 \cdot k$. $(k \in \{1,2,3\})$

   (b) Määrää funktiolle $f(x, y) = y^2 e^{x^2 + y}$ Taylorin polynomit $T_k(f, a)$, kun a=(0,0) sekä k = 4 ja 5. Laske $\partial_1^2 \partial_2^3 f(0,0)$.

Huom. Tentissä saa olla mukana tiivistelmäpaperi (kaksipuoleinen A4 -arkki), taulukkokirja ja laskin.