

KUOPION YLIOPISTO

Tietojenkäsittelytieteen ja sovelletun matematiikan laitos

Differentiaaliyhtälöt

Loppukoe 9. huhtikuuta 2002

Ratkaise viisi (5) tehtävää.

1. Määrä kaikki jatkuvat funktiot $y : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, jotka toteuttavat integraaliyhtälön

$$y(x) = 1 + \int_0^x ty(t)^2 dt.$$

Määrä myös maksimaalinen väli Δ , jolla ratkaisu on määritelty.

2. Mitä tarkoitetaan integroivalla tekijällä? Osoita, että yhtälöllä

$$2y^2 - 6xy + (3xy - 4x^2)y' = 0$$

on muotoa $\mu(xy)$ oleva integroiva tekijä ja ratkaise yhtälö.

3. Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 36y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

4. Olkoot p ja q välillä $\Delta =]0, \infty[$ jatkuvia funktioita sekä $y(x) = x^2$ differentiaaliyhtälön

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

ratkaisu välillä Δ . Ratkaise yhtälö, kun tiedetään, että sen kahden ratkaisun y_1 ja y_2 Wronskin determinantti $W(y_1, y_2)$ on aina vakio.

5. Selitä miten tason vakiokertoiminen lineaarinen differentiaaliyhtälöpari $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$ ratkaistaan matriisimenetelmällä. Esimerkkinä ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

alkuehdolla $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. Hahmottele ratkaisukäyrä.

(Käännä)

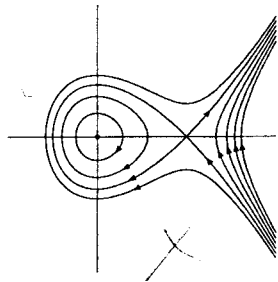
6. Oheisissa kuvissa on tason autonomisten systeemien

$$\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = y^2 - 4x^2 \end{cases}$$

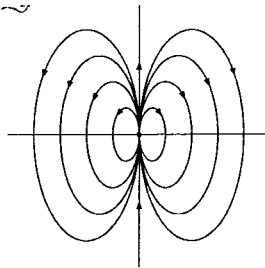
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^2 - x \end{cases}$$

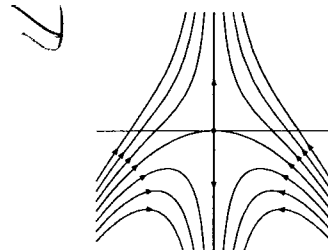
ratoja.



(1)



(2)



(3)

(a) Mikä kuva vastaa mitään systeemiä? Perustelee valintasi jotenkin!

(b) Origo on jokaisen systeemin kriittinen piste. Mitä voit kuvien perusteella päätellä sen stabiilisuudesta?

(c) Todista yksi (b)-kohdan päätelmistäsi.