KUOPION YLIOPISTO Tietojenkäsittelytieteen ja sovelletun matematiikan laitos

Analyysin perusteet
tentti 9. toukokuuta 2001.
Kokeessa saa olla mukana laskin ja lunttilappu, mutta ei taulukkokirjaa.

Ensimmäinen välikoe: ratkaise neljä tehtävistä **1 - 5.**
Toinen välikoe: ratkaise neljä tehtävistä 6 - 10.
Loppukoe: ratkaise viisi tehtävistä 3 - 8.

1. Olkoon $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ jatkuva funktio ja $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$. Osoita, että f saavuttaa suurimman tai pienimmän arvonsa.

2. Todista kahdella erilaisella tavalla, että funktio $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n},\text{kun } x\in\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right], n=1,2,\ldots\\ 0,\text{kun } x=0\end{cases}$$
on Riemann-integroituva.

3. Määrää seuraavat raja-arvot:
   (a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\log(1+x)}$.
   (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sinh x}{\tan(x)^3}$.
   (c) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}\int_1^x\sqrt{1+x^4}\,dx$.

4. Laske neljännen asteen Taylorin polynomin avulla likiarvo integraalille
$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{x^2}\,dx$$
ja arvio likiarvon tarkkuutta.

5. Olkoon funktio $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jaksollinen jaksona $\omega>0$, ts. $f(x+\omega)=f(x)$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$. *Jos* f on Riemann-integroituva yli välin $[0,\omega]$, niin osoita, että se on integroituva yli jokaisen välin $[a, a+\omega]$ ja
$$\int_a^{a+\omega} f=\int_0^{\omega} f$$
Jos f on lisäksi jatkuva, niin esitä yhtälölle vielä toisenlainen todistus.

6. Selvitä suppenevatko seuraavat epäoleelliset integraalit. Laske niistä yksi.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1} \qquad \int_0^\infty e^{-\sin x}\,dx \qquad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$$

7. (a) Oletetaan, että sarja $\sum_{k=0}^\infty a_k$ suppenee, mutta ei suppene itseisesti. Mitä voit päätellä potenssisarjan $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ suppenemissäteestä?
(b) Osoita, että *Besselin funktio*

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t)\,dt$$

voidaan esittää potenssisarjana, joka suppenee kaikilla x E R.

8. Osoita, että funktiojono (f_n)

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

suppenee pisteittäin, mutta ei tasaisesti $\mathbb{R}$:ssä. Osoita edelleen, että suppeneminen on tasaista jokaisella rajoitetulla välillä Δ.

9. (a) Olkoon $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ jatkuva funktio, oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 1$$

Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

suppenee.
(b) Kuinka tarkka on likiarvo

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(x^2)\,dx \approx \int_0^{\frac{1}{2}} (x^2 - \frac{1}{6}x^6)\,dx \ ?$$

10. Selitä mitä eroa on funktiojonon pisteittäisellä ja tasaisella suppenemisella. Kerro edelleen mitä iloa ja hyötyä tasaisesta suppenemisesta on. Lauseiden todistuksia ei tarvitse esittää, mutta valaise esitystäsi huolellisesti käsitellyillä esimerkeillä.