Integraalilaskenta. LT 2007

1. a) (teoria) Oletetaan, että $f \in R(I)$. Osoita, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa jako $P_\epsilon \in P(I)$ s.e.

$$U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon.$$

   b) Osoita edellisen tehtävän ehtoa käyttäen, että kuvaus $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ s.e. $f(x) = x_1$ on Riemann integroituva.

2. Osoita, että joukko

$$A = \{x \in \mathbf{R}^3 |\ x_1^2 + x_2^2 \leq x_3,\ 0 \leq x_3 < 1\}$$

   on Jordan mitallinen. Määrää Jordan mitta $\mu(A)$.

3. Tutki, onko seuraavilla funktioilla potentiaalifunktio

   a) $f : G := \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}^n$; $f(x) = x/||x||$

   b) $f : G := \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$; $f(x) = (-x_2, x_1)$

   Myönteisessä tapauksessa määrää potentiaalifunktio.

4. Määrää $\int_S (||x|| - 2x_1)\mathrm{d}S$, kun $S \subset \mathbf{R}^3$ on pallon $B_3(0, R)$ pinnan 1. oktantti

5. a) Määrää Gaussin Lauseen avulla funktion $f(x) = (\ln(x_2^2+1), e^{x_1}, 2x_3+1)$ pintaintegraali puolipallon $A = B(0,R) \cap \{x \in \mathbf{R}^3 |\ x_3 > 0\}$ (koko) pinnan yli

   b) (jatkuu) Määrää pintaintegraali puolipallon pinnan ("pohja" ei mukana) yli. (Ohje: Hyödynnä a)-kohdan tulosta.)