Integraalilaskenta. LT 7.6. 2006

1. (teoria) Olkoon $I \subset \mathbf{R}^n$ kompakti väli ja $f : I \to \mathbf{R}$ rajoitettu kuvaus. Oletetaan, että
$$\text{ala}\int_I f(x)\mathrm{d}x = \text{ylä}\int_I f(x)\mathrm{d}x.$$
Osoita (määritelmän nojalla), että f on Riemann integroituva.

2. Osoita, että joukko
$$A = \{x \in \mathbf{R}^3 |\ x_3 \geq x_1^2 + x_2^2,\ x_3 < 4, x_1 \geq 0\}$$
on Jordan mitallinen ja määrää sen Jordan mitta.

3. Määrää $\int_A f$, kun $f(x) = (x_1^2 + 2)(x_2x_3 + 1)$ ja
$$A = \{x \in \mathbf{R}^3 |\ x_1^2 + x_2^2 \leq R^2,\ 0 < x_3 \geq H,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}.$$
Käytä sylinterikoordinaatistomuunnosta.

4. Määrää funktion $f(x) = (x_2x_3, x_1, -x_3^2)$ pintaintegraali pinnan
$$S = \{x \in \mathbf{R}^3 |\ x_2 = x_1^2,\ x_1 \in [0,1],\ x_3 \in [0,4]\}$$
yli.

5. a) Olkoon Γ umpinainen säännöllinen Jordan käyrä tasossa $T = \{x \in \mathbf{R}^3 | 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2\}$ ja olkoon T_0 käyrän Γ sisäosa tasolla T. Olkoon edelleen $f(x) = (2x_2, 3x_3, -x_1)$. Osoita, että
$$\left|\oint_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma\right| = cm(T_0)$$
ja määrää vakion c arvo (edellä $m(T_0)$ on T_0:n pintamitta).

   b) Olkoon $A \subset \mathbf{R}^3$ Jordan mitallinen joukko, jonka reuna ∂A on säännöllinen suunnistuva (normaali osoittaa alueesta A ulospäin) pinta. Osoita, että
$$\mu(A) = \frac{1}{3}\int_{\partial A} f \cdot \mathrm{dn}$$
missä $f(x) = x$.

HUOM. Uusintatentti 30.6. yleisen tentin yhteydessä; tenttiin tulee ilmoittautua kuorella 14.6. mennessä.

Mukana saa olla:
Taulukot
Laskin
2xA4 muistiinpanot