Differentiaalilaskenta. LT 10.12.2004

1. a) Osoita, että jos $A_i \subset E$ on avoin kaikilla $i \in I$ niin $\cup_{i=1}^{n} A_i$ on avoin. Tutki, onko väite voimassa, jos yhdiste korvataan leikkauksella

   b) Oletetaan, että A on normiavaruuden E kompakti osajoukko ja että $f : A \to F$ jatkuva. Osoita, että $f(A)$ on kompakti

2. a) Olkoon $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ kuvaus

$$f(x) = \frac{2}{1 + ||x||^{\alpha}},$$

   missä $\alpha > 0$. Millä α:n arvoilla f on differentioituva pisteessä 0 ?

   b) Osoita, että funktiot

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4;\ f(x) = (x_1^4, x_2 + x_3, x_1, 3x_1x_2^2)$$
$$g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2;\ g(y) = (\sin y_2, y_4 \cos(y_1 + y_2))$$

   ovat jatkuvasti differentioituvia.

   Olkoon $h = g \circ f$. Määrää derivaatta $Dh(0)$

3. Osoita, että yhtälöryhmästä

$$x_1^4 + 4\sin(x_3x_2) + x_4 = 2$$
$$2\cos(x_1 + 1) - (x_2 + 5)^2 + x_3 + x_4 = 3.$$

   voidaan ratkaista x_3 ja x_4 argumenttien x_1 ja x_2 funktiona, $x_3 = \phi_1(x_1, x_2)$, $x_4 = \phi_2(x_1, x_2)$ jossain pisteen $(-1, -5, 0, 1)$ ympäristössä. Olkoon $\phi = (\phi_1, \phi_2)$. Määrää $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(-1, -5)$, $j = 1, 2$

4. Olkoon $a \in \mathbf{R}^n$ siten, että $a_j > 0$ kaikilla j ja olkoon $b \in \mathbf{R}$. Määrää kuvauksen $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ siten, että $f(x) = \langle a, x \rangle - b$. ääriarvot joukossa (pinnalla) $S = \{x \in \mathbf{R}^n |\ \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 2,\ x_j > 0,\ j = 1, ..., n\}$

5. Määrää pinnan

$$2x_1^2 + 3x_2^2 = (x_3 + 1)^2,\ x \neq (0, 0, -1)$$

   tangenttitason ja normaalisuoran *yhtälöt* pisteessä $x_0 \in S$. Missä pisteessä normaalisuora on vektorin $(0, 6, 1)$ suuntainen ?. Mikä on tangenttitason yhtälö ko. pisteessä ?.