

Differentiaaliyhtälöt

Yleinen kuulustelu 30.6.2006

1. Määrää kaikki jatkuvat funktiot $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, jotka toteuttavat integraaliyhtälön

$$y(x) = 2 + \int_0^x (y(t) - t)^2 dt.$$

Määrää myös maksimaalinen väli I , jolla ratkaisu on määritelty.

2. Ratkaise integroivaa tekijää käyttäen differentiaaliyhtälö

$$2xy dx + (y^2 - 3x^2) dy = 0,$$

kun integroiva tekijä on muotoa $\mu = \mu(y)$.

3. Ratkaise alkuarvotettava

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 6x_2; & x_1(0) = 1 \\ x_2' = 6x_1 - x_2 & x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Hahmottele ratkaisun kulkua x_1x_2 -tasossa alkupisteestä lukien.

4. Tarkastellaan alkuarvotettavaa

$$y'' - \frac{1}{t}y' - \frac{3}{t^2}y = 0; \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 8, \quad 0 < t < \infty.$$

- a) Osoita, että funktiot $y_1(t) = t^3$ ja $y_2(t) = t^{-1}$ muodostavat differentiaaliyhtälön ratkaisukannan.
b) Ratkaise annettu alkuarvotettava.

Huom! Tentissä saa olla mukana jokin kaavakokoelma, luentomonisteaineisto, oppikirjamoniste (P. Kekäläinen), ja taskulaskin. Ei siis laskuharjoitustehtävämateriaalia eikä niiden ratkaisuja.